Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 3

Д. В. Аносов

ВЗГЛЯД НА МАТЕМАТИКУ И НЕЧТО ИЗ НЕЁ

Издание второе, исправленное

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2003

УДК 51(09)
ББК 22.1г
А69

Аннотация

В брошюре рассказано о зарождении математики и её дедуктивном построении. Рассмотрены два примера — теорема Пифагора и задача описания всех пифагоровых троек.

Текст брошюры представляет собой обработку записи лекции, прочитанной лауреатом Государственной премии СССР академиком РАН Д. В. Аносовым 5 декабря 1999 года для участников III Международного математического турнира старшеклассников «Кубок памяти А. Н. Колмогорова» — школьников 8—11 классов.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей...

Первое издание — январь 2000 года.

Издание осуществлено при поддержке Департамента образования г. Москвы и Московской городской Думы.

ISBN 5-94057-111-5

Дмитрий Викторович Аносов.

Взгляд на математику и нечто из неё.

2-е изд., испр.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 3).
М.: МЦНМО, 2003. — 24 с.: ил.

Редактор *Ю. Л. Притыкин.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано к печати 14/VII 2003 года.
Формат бумаги $60\times88\,{}^1\!/_{16}$. Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 1,50.
Усл. печ. л. 1,47. Уч.-изд. л. 1,63. Тираж 3000 экз. Заказ 2712.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
121002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

Меня пригласили прочитать вам лекцию, а о чём, не сказали. Раз ничего определённого мне не было заказано, встал вопрос: о чём же говорить? К счастью, в художественной литературе нашлась подсказка — «Взгляд и нечто». Но у меня будет не совсем так, как там, дабы не было явного плагиата. У Грибоедова сказано: «О чём бишь нечто? обо всём». А у меня «нечто» — это пара конкретных примеров, а вот «взгляд» будет обо всей математике.

О ЗАРОЖДЕНИИ МАТЕМАТИКИ

Итак, взгляд на математику. Откуда она произошла, когда и где это было? Считается, что не только математика, но и вся наука как единая система знаний, не обязательно непосредственно связанных с практической деятельностью, и как отдельная сфера человеческой деятельности, имеющей своей целью получение новых знаний, возникла в Древней Греции. До того уже имелись научные сведения, подчас немалые, но, насколько мы можем судить, не было науки в том смысле, как я сказал. Может быть, то, что было до греков, стоит назвать «протонаукой»*).

Что было после возникновения и поначалу блестящего развития науки в Древней Греции, вы, вероятно, знаете. У греков эстафету переняли арабы. Это были не только этнические арабы, но и вообще народы исламского мира. Арабский язык, будучи языком Корана, стал языком, который каждый образованный мусульманин должен был знать. Поэтому он стал международным языком. Научные труды тоже писали по-арабски. Ну а у арабов науку переняли европейцы. Здесь надо сделать оговорку, что переход от протонауки к науке произошёл, пусть не столь отчётливо и несколько позднее, также и в Древнем Китае, и никакого греческого влияния при этом не могло быть. Но если во втором тысячелетии нашей эры различные китайские достижения — порох, ракеты, примитивное книгопечатание, бумага — проникли в Европу, а лет за 500 до того то же произошло с шёлком и всё это оказало немалое влияние на средневековую Западную Европу, то о китайских научных достижениях европейцы узнали тогда, когда они уже в этом не нуждались.

Итак, говоря о зарождении математики, надо сперва сказать о возникновении протонауки, а потом о её преобразовании в науку.

Протонаука зародилась в Древнем Египте и Древней Месопотамии. Древние греки об этом знали. Но начало этого процесса отстояло от них примерно на столько же, на сколько древние греки отстоят от нас. Судите сами: интересующий нас период в истории Древней Греции — это, грубо говоря, 500 лет до н. э. плюс-минус двести лет, после чего идёт уже эпоха эллинизма. А возникновение

*) «Прото» — это приставка, происходящая от греческого «протос», которое буквально означает «первоначальный», но теперь её часто употребляют в несколько ином смысле: «проточто-то» означает нечто такое, что предшествует этому чему-то и из чего это что-то развилось, но что в полной мере этим чем-то ещё не является. Например, в этом смысле в археологии и истории говорят о протогосударствах.

первого египетского государства и шумерских государств или протогосударств в Месопотамии — это примерно 3000 лет до н. э. плюс-минус несколько столетий (датировки на моей памяти изменялись в пределах этих плюс-минус, но для нас это несущественно). Примерно тогда же возникла письменность, и, по-видимому, примерно тогда же человечество овладело первыми знаниями, составившими начало протонауки. Значительное развитие первые протонауки — протоматематика и протоастрономия — получили вскоре после 2000 года до н. э., и к середине второго тысячелетия до н. э. они уже определённо сложились. Древнегреческие мыслители, писавшие о зарождении науки, знали, что цивилизации Египта и Месопотамии намного древнее греческой и что довольно многочисленные и подчас далеко не простые научные сведения были там известны задолго до того, как они стали достоянием греков, независимо от того, заимствовали ли греки эти сведения на Востоке или приобрели их самостоятельно. Но эти древнегреческие мыслители не умели читать ни египетские иероглифы, ни месопотамскую клинопись, а теперь это умеют, хоть и не всегда свободно. Греки нередко путешествовали в Египет, реже в Месопотамию, но на восточном берегу Средиземного моря тогда имелись греческие города, у которых были связи со многими частями Персидской Империи, в том числе и с Вавилоном, так что и из Вавилона до греков тоже кое-что доходило. Кроме того, в греческую эпоху связи между Вавилоном и Египтом были довольно развитыми, так что вавилонская наука могла доходить до греков и через Египет. Но греческий автор мог узнать только то немногое, что ему во время сравнительно непродолжительного пребывания в Египте или Вавилоне мог сообщить переводчик или что рассказывали приезжие из этих стран. Так что хотя за несколько столетий до н. э. египетские и месопотамские архивы находились в куда лучшем состоянии, чем то, что дошло до нас, положение современных историков отчасти лучше, чем древнегреческих. Должно быть, из-за того, что их возможности ознакомления с египетскими и месопотамскими научными сведениями были ограничены, древнегреческие историки науки, насколько известно, не отмечали качественного отличия возникшей у них науки от протонауки Древнего Востока. Они не осознавали главного достижения своих соотечественников!

Что же всё-таки говорили древние греки о начальном этапе зарождения науки (когда, как мы теперь знаем, она была ещё протонаукой)? Они считали родиной науки Египет, хотя теперь известно, что в Месопотамии она возникла независимо и что в некоторых отношениях уровень вавилонян был намного выше. Это свидетельствует о том, что связи с Египтом в Греции были лучше налажены, чем с Вавилоном. Как полагал Аристотель, зарождение математики было связано с тем, что у египетских жрецов было много свободного времени и они размышляли о возвышенных предметах. Другие авторы, и прежде всего Геродот, который сам побывал в Египте, связывали зарождение математики, а точнее геометрии, с практической необходимостью — землемерными работами. (Кстати, само название «геометрия» по-гречески как раз и означает «землемерие».) В Египте необходимость в быстром и точном проведении землемерных работ стояла особенно остро. До недавнего времени — до строительства Асуанской плотины — Нил ежегодно, начиная с июня, разливался на несколько месяцев, затопляя значительную часть Нильской долины и принося на затопленные поля плодородный ил. После спадения воды необходимо было восстанавливать границы полей и дороги, а также определять, какую часть того или иного участка в этом году вследствие причинённых разрушений использовать не удастся — это было нужно для уточнения размера налога. К этому можно добавить, что землемерие требовалось также при крупномасштабном строительстве, будь то строительство пирамид, храмов, дворцов или ирригационных каналов. В Месопотамии вопрос не стоял столь остро, но всё же и там случались наводнения и велись строительные работы, включая ирригационные, так что тоже имелась немалая потребность в землемерных работах.

Кто же был прав, Аристотель или Геродот? Думаю, что в известной степени правы оба. В более общем духе можно сказать, что речь идёт о задачах практического происхождения и о развитии математики, а отчасти и протоматематики, под действием внутренне присущих ей причин. Оба фактора действуют и в наши дни, только надо пояснить, что теперь для самой математики «практический» характер имеют и её применения в других науках, даже если поначалу при этом речь идёт о внутреннем развитии этих наук, а не об их практических применениях. Вопрос может стоять только о взаимном балансе этих двух факторов — была ли их роль в том или ином случае более или менее равноправной или же роль одного из них была ведущей.

Применительно к самому началу, видимо, прав Геродот. Древнейшие дошедшие до нас математические тексты являются учебниками, адресованными не жрецам, а писцам. Как указывают историки, в то время вообще не было отдельного сословия жрецов, а их обязанности при случае выполняли уважаемые граждане, миряне, возвращаясь затем к своим обычным занятиям. Писцы же были государственными служащими, которые должны были распределять заработную плату, подсчитывать налоги, вычислять, сколько зерна надо для приготовления такого-то количества хлеба или пива, вычислять площади и объёмы, переводить одни меры в другие. Для этого надо уметь производить вычисления, в том числе и с дробями, чему писцы и учились на примерах, содержащихся в их учебниках.

Надеюсь, вам доставит удовольствие следующий отрывок, носящий не математический, а сатирический характер. Автор папируса обращается к реальному или вымышленному писцу, который занимает высокое положение, но в действительности некомпетентен и который, похоже, имеет возможность эксплуатировать автора:

«Я хочу объяснить тебе, что это значит, когда ты говоришь: „Я писец, отдающий приказы армии". Тебе поручено выкопать озеро. Ты приходишь ко мне, спрашиваешь о запасах для солдат и говоришь: „Сосчитай мне это". Ты оставляешь свою работу, и на мои плечи сваливается задача — учить тебя, как её надо выполнять. Я ставлю тебя в тупик, когда приношу тебе повеление от твоего господина, тебе — его царскому писцу, ⟨...⟩ мудрому писцу, поставленному во главе этого войска. Надлежит сделать насыпь для подъёма*) в 750 локтей длины и 55 локтей ширины, состоящую из 120 отдельных ящиков и покрытую перекладинами и тростником. На верхнем конце её высота 60 локтей, а в середине 30 локтей; уклон её — дважды по 15 локтей, а настил — 5 локтей. Спрашивают у военачальников, сколько понадобится кирпичей, и у всех писцов, и ни один ничего не знает. Все они надеются на тебя и говорят: „Ты искусный писец, мой друг, сосчитай это нам поскорей. Смотри, имя твоё славится. Сколько же надо для этого кирпичей?"».

Из этого отрывка видны некоторые из обязанностей писца. Речь идёт не о каких-то мистических тайнах мироздания или, что то же, богов, чего можно было бы ожидать от жрецов, а о весьма прозаических делах, требующих определённой квалификации. Видно также, что уже три с половиной тысячи лет назад объективно прогрессивный процесс разделения труда дошёл до того, что видный организатор науки (протонауки) мог быть не очень в ней силён.

На более позднем этапе (и, может быть, более в Вавилоне, чем в Египте), видимо, сыграли свою роль и «высокие» мотивы вместе с соответствующими возможностями в смысле досуга, о чём говорил Аристотель. Жрецы тоже могли выступить на сцену. Им не приходилось подсчитывать число кирпичей, но они, может быть, занимались астрономией ради астрологических предсказаний. Тогда не могло быть речи о составлении гороскопов, требующем знания положения планет на небе, начиная с момента рождения того лица, для которого составляется гороскоп, и на много лет после того. Но тогда была, так сказать, «протоастрология», делавшая предсказания на более короткие отрезки времени на основании более ограниченных данных о виде неба. С развитием астрономии в ней появилась немаловажная вычислительная сторона, требовавшая некоторой математики. Впрочем, насколько во всём этом участвовали жрецы — неизвестно. Известно, что заведомо существовали астрологи-профессионалы, которые не были жрецами.

В вавилонской протонауке уже определённо происходил переход к науке. В клинописных текстах рассмотрено много задач,

---

*) В то время значительную тяжесть поднимали, вкатывая её на насыпь. Подъёмные блоки типа полиспастов изобрели позднее.

не имеющих отношения ни к кирпичам для насыпи, ни к другим видам практической деятельности. Фактически, там решаются квадратные уравнения и даже отдельные уравнения более высоких степеней — и это без алгебры! Вавилоняне знали так называемую теорему Пифагора и теорему, обратную к ней. Это как раз могло иметь отношение к землемерию, потому что позволяло с помощью верёвки построить прямой угол. В более позднюю эпоху, когда в Греции уже зародилась наука в нашем смысле слова, какие-то геометрические построения на местности с помощью верёвки уже определённо производились. На сей счёт имеется прямое свидетельство Демокрита, который с гордостью заявил: «В построении линий с доказательствами я никем не был превзойдён, даже так называемыми египетскими гарпедонавтами*)». В словах Демокрита удивительно упоминание о доказательствах. Ни в одном египетском или вавилонском тексте ничего похожего на доказательства нет. Но, с другой стороны, часть вавилонской протонауки достигла уже такого уровня, когда соответствующие результаты невозможно было получить без каких-то рассуждений, может быть и не дающих исчерпывающе строгого доказательства, но приближающихся к нему. А Демокрит состязался с гарпедонавтами в довольно позднее по масштабам древнеегипетской истории время. Увы, повторяю, что ни одного текста с доказательствами до нас не дошло. Уверенно реконструируется благодаря более поздним индийским источникам только одно-единственное рассуждение — доказательство теоремы Пифагора.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ

Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза. Построим квадрат $ABCD$ со стороной $a+b$ и возьмём на его сторонах AB, BC, CD, DA такие точки E, F, G, H соответственно, что $AE=BF=CG=DH=a$ (рис. 1). Иными словами, от каждой из вершин A, B, C, D откладывается по отрезку длины a в направлении к следующей вершине; «следующей» значит «следующей в порядке $ABCDA$». Наш квадрат разбивается на четырёхугольник $EFGH$ и четыре прямоугольных треугольника EBF, FCG, GDH, HAE. У каждого из треугольников один катет равен a, а другой — b. Значит, все эти треугольники равны, так что, в частности, $\angle AEH=\angle BFE$. Гипотенуза равна c, а площадь треугольника есть $\frac{1}{2}ab$. У четырёхугольника $EFGH$ длина каждой стороны равна c, так что это ромб. Кроме того, все его углы прямые.

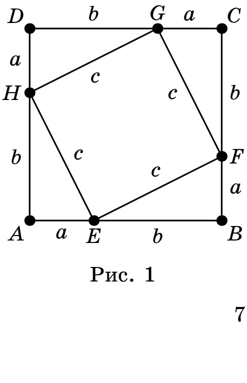

Рис. 1

*) Греческое слово «гарпедонавт» означает «натягивающий верёвку».

Например, $\angle HEF = \angle AEB - \angle BEF - \angle AEH = 180^\circ - \angle BEF - \angle BFE = \angle EBF = 90^\circ$. Итак, $EFGH$ — квадрат со стороной c, так что его площадь равна c^2. Но сумма его площади и площадей четырёх треугольников равна площади исходного большого квадрата, т. е. $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = (a+b)^2$. Левая часть равна $c^2 + 2ab$, а правая — $a^2 + 2ab + b^2$, откуда и видно, что $c^2 = a^2 + b^2$. Мы использовали алгебраическую символику, которой в Вавилоне не было, но вавилонские математики умели проделывать всё, что здесь требуется, иначе, хотя это и было более громоздко.

Это самое простое и легко запоминающееся доказательство теоремы Пифагора, какое я видел. Теперь его часто используют в школе. Но если вы посмотрите учебники, которые были приняты как основные в течение длительного времени, то вы там его не найдёте. Почему? Неужели их авторы, люди вполне сведущие и умные, не знали этого рассуждения, известного уже несколько тысяч лет, или не понимали, что оно понятнее, проще, лучше запоминается, чем другие? Позднее я скажу, в чём, по-моему, здесь дело.

С теоремой Пифагора связана арифметическая задача. Имеются такие тройки натуральных (т. е. целых положительных) чисел x, y, z, что

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Их называют пифагоровыми тройками. Например, годятся числа $x=3$, $y=4$, $z=5$: $9+16=25$. Это пример. А можно ли указать все пифагоровы тройки (x, y, z)? Иными словами, можно ли найти все решения уравнения $x^2+y^2=z^2$ в натуральных числах? (В связи с терминологией обратите внимание, что решение — это не одно число, а три.) Да. Ответ таков: каждое такое решение можно представить в виде

$$x = l(m^2 - n^2), \quad y = 2lmn, \quad z = l(m^2 + n^2), \tag{2}$$

где l, m, n — натуральные числа, причём $m > n$, или в аналогичном виде, в котором x и y меняются местами. Можно чуть короче сказать, что x, y, z из (2) со всевозможными натуральными l и $m > n$ суть все возможные решения (1) с точностью до перестановки x и y. Например, тройка (3, 4, 5) получается при $l=1$, $m=2$, $n=1$.

То, что при любых натуральных l, m, n с $m > n$ тройка (x, y, z), определяемая согласно (2), является решением (1), можно проверить непосредственно путём простого вычисления, и я на этом останавливаться не буду. Интересно другое: почему любое решение обязательно имеет вид (2)? Об этом я и буду говорить. На самом деле, как это часто бывает, «прокручивая в обратную сторону» мои рассуждения, тоже можно доказать, что любая тройка вида (2) является решением, но на этом я тоже не буду останавливаться. Что при перестановке x и y снова получается решение — об этом и говорить нечего.

По-видимому, вавилоняне знали этот ответ, но как они к нему пришли — неизвестно. (Впрочем, не ясно, знали ли они, что все решения (1) представимы в виде (2), да и задавались ли они таким вопросом. Имеется правдоподобная, хотя и гипотетическая, реконструкция их рассуждений, в которой этим вопросом не задаются, а ищут способ как-нибудь получить побольше решений.) Как его позднее доказывали древние греки — известно; по существу, их доказательство в модернизированном виде (с явным использованием алгебры) воспроизводится во многих книгах, и, вероятно, многие из вас его знают. А я хочу рассказать несколько более простое доказательство, которое я узнал в свои студенческие годы от моего однокурсника Юры Манина. Ныне Юрий Иванович Манин — член-корреспондент Российской академии наук, лауреат Ленинской премии, один из директоров международного Математического института им. Макса Планка в Бонне. Ни одного из этих высоких титулов вроде бы не нужно, чтобы придумать то простое рассуждение, которое я сейчас расскажу; в истории неоднократно бывало, что любители придумывали куда более затейливые вещи. Тем не менее, я нигде в литературе не встречал этого рассуждения. Впрочем, не могу поручиться, что его нигде нет или что никто, кроме Манина, такого доказательства не мог придумать. Так что не исключено, что кто-нибудь из вас это рассуждение знает. Но уж точно, что таких среди вас не может быть много — рассуждение если и является известным, то не общеизвестным.

Сперва несколько простых замечаний, которые предшествуют и обычному доказательству. Если x, y и z имеют общий делитель $k>1$, скажем $x=ku$, $y=kv$, $z=kw$, где u, v, w — натуральные числа, то ясно, что тройка (u, v, w) снова является решением (1). Обратно, если мы знаем какое-то решение (x, y, z), то, умножив эти три числа на какое-нибудь натуральное k, мы снова получим решение. Поэтому можно ограничиться разысканием решений, не имеющих общего делителя. В данный момент речь идёт об общем делителе всех трёх чисел. Но если бы у двух из этих чисел, скажем у x и y, был общий делитель, то тот же делитель был бы и у третьего. Поэтому мы можем ограничиться разысканием решений, в которых любые два числа (x и y, x и z, y и z) не имеют общих делителей, больших 1. Это выражают словами: рассматриваемые числа x, y, z попарно взаимно просты.

При $l\neq1$ числа x, y, z в (2) не взаимно просты: они имеют общий делитель l. Так что если мы интересуемся только взаимно простыми x, y, z, то для них в (2) должно быть $l=1$, и утверждение, которое мы хотим доказать, несколько упрощается: натуральные решения (x, y, z) уравнения (1) с взаимно простыми x, y, z с точностью до перестановки x и y представимы в виде

$$x=m^2-n^2, \quad y=2mn, \quad z=m^2+n^2, \tag{3}$$

где m, n — натуральные числа и $m>n$. Заметьте, что я вовсе не утверждаю обратного: что любые (x, y, z), получающиеся согласно (3) с натуральными $m > n$, являются решением (1) и попарно взаимно просты. Решением эта тройка будет, но числа x, y, z не обязательно получатся взаимно простыми. Ведь если у m и n есть общий делитель, то он войдёт (даже с квадратом) и в x, и в y, и в z.

Так что если бы я хотел настаивать на обратном утверждении, что любые (x, y, z), получающиеся согласно (3) с натуральными $m > n$, будут решением (1) с попарно взаимно простыми x, y, z, то я, самое меньшее, должен был бы уточнить: с взаимно простыми m и n. А было бы такого уточнения достаточно? Оказывается, нет (вначале, должен сознаться, я было подумал, что да, но меня поправили). Ведь если m и n оба нечётные, то x получится чётным, а y в (3) всегда чётное. Но если одно из чисел m, n чётное, а другое нечётное, то x получится нечётным, и общим с y у него мог бы быть только нечётный делитель. Тогда у x и y имеется и нечётный простой делитель p. Раз $2mn$ делится на p, то m или n делится на p, а тогда, раз $m^2 - n^2$ тоже делится на p, то и второе из чисел m, n делится на p, т. е. m и n не взаимно просты, а мы уже решили, что будем брать только взаимно простые m, n. Но главное, что этого нам сейчас не нужно. Нам надо только установить, что решение (1) с взаимно простыми натуральными x, y, z обязательно представимо в виде (3) с какими-то m, n, а что при каких-то других m, n могут получиться решения с не взаимно простыми x, y, z — это нас сейчас не касается.

Другое замечание состоит в том, что когда мы ограничиваемся решениями с попарно взаимно простыми x, y, z, то одно из чисел x и y должно быть чётным, а другое — нечётным; z при этом, конечно, нечётно. Действительно, если x и y оба чётные, то они не взаимно просты, а имеют общий делитель 2. Если же они оба нечётны, то мы можем написать, что $x = 2r - 1$, $y = 2s - 1$ с некоторыми натуральными r, s. Отсюда

$$z^2 = (2r-1)^2 + (2s-1)^2 = 4(r^2 - r + s^2 - s) + 2.$$

Получается, что z^2 делится на 2, но не делится на 4. Но это невозможно: если z нечётно, то z^2 и на 2 не делится, а если z чётно, то z^2 делится на 4.

Раз одно из чисел x и y чётно, а другое нечётно, то можно считать, что нечётно x, а чётно y, — в противном случае мы просто изменим обозначения. Вот теперь начинается главное. Перепишем (1) так:

$$y^2 = z^2 - x^2, \qquad \left(\frac{z}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1$$

или, обозначая $\dfrac{z}{y}$ через u и $\dfrac{x}{y}$ через v, в виде $u^2 - v^2 = 1$, т. е. $(u+v)(u-v) = 1$. u и v суть частные двух натуральных чисел, т. е. положительные рациональные числа (дроби). $u+v$ тоже рациональное число, причём положительное. Любое такое число представляется в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$; здесь m и n — натуральные числа, причём взаимно простые (раз дробь несократимая). А если $\frac{m}{n}(u-v)=1$, то $u-v=\frac{n}{m}$. Итак,

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{m}{n}, \\ u-v=\dfrac{n}{m}, \end{cases} \tag{4}$$

где m, n — взаимно простые натуральные числа. Рассматривая (4) как линейную систему уравнений относительно u, v, решим её, для чего достаточно сложить эти два уравнения, откуда получится $2u$, и вычесть второе из первого, откуда получится $2v$:

$$\frac{z}{y}=u=\frac{m^2+n^2}{2mn}, \quad \frac{x}{y}=v=\frac{m^2-n^2}{2mn}. \tag{5}$$

Отсюда видно, кстати, что $m>n$.

Мы знаем, что $\frac{z}{y}$ и $\frac{x}{y}$ — несократимые дроби. Если бы мы знали, что дробь $\frac{m^2-n^2}{2mn}$ тоже несократимая, то из (5) сразу следовали бы соотношения (3). Но пока что мы этого не знаем; однако о дробях $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{y}$ мы знаем, что они несократимые. Поэтому из (5) мы вправе сделать заключение, несколько более слабое, чем (3): существует такое натуральное k, что

$$m^2+n^2=kz, \quad 2mn=ky, \quad m^2-n^2=kx. \tag{6}$$

Допустим, что k имеет нечётный простой делитель p. Тогда $2mn$ делится на p, а раз это нечётное простое число, то m или n делится на p. Но тогда и одно из слагаемых в левой части равенства $m^2+n^2=kz$, и его правая часть делятся на p; выходит, что и второе слагаемое в левой части тоже делится на p. Получается, что и m, и n делятся на p, хотя они взаимно просты. Итак, у k нет нечётных простых делителей, так что k есть степень двойки. Вспомним, что y — чётное число, $y=2w$. Получается, что $2mn=2kw$, $mn=kw$, и если k — степень двойки (с ненулевым показателем), то число mn чётное. Тогда хотя бы одно из чисел m, n — чётное. Но из $m^2+n^2=kz$ следует, что m^2+n^2 — чётное число, и если вдобавок одно из чисел m или n — чётное, то и другое должно быть чётным. Снова у m и n нашёлся общий делитель. Остаётся признать, что $k=1$, а это и означает (3).

О ДЕДУКТИВНОМ ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИКИ

На этом мы расстанемся с Древним Вавилоном и перенесёмся мысленно в Древнюю Грецию, где, как уже говорилось, протонаука превратилась (или, лучше сказать, окончательно превратилась) в науку. Это произошло не только с математикой, но и с философией, астрономией, географией, биологией; отчасти это начало происходить с некоторыми частями физики (со статикой и акустикой). Судя по всему, рано или поздно это всё равно произошло бы (доказательством служит Китай), но тому, что это произошло именно в Греции, как полагают, способствовали некоторые особенности греческого общества. В Греции впервые в истории получили общественное одобрение все виды творчества, продуктивной духовной деятельности, в том числе и лишённые непосредственного утилитарного значения. Общественная и культурная обстановка была такова, что широкую известность получали авторы даже тех открытий, которые не имели практической ценности. Греческому обществу был присущ дух соревновательности, причём главным признавалась победа, дававшая славу, тогда как материальных благ с ней могло и не связываться, и в любом случае они не были главным. Такое положение сложилось в греческом спорте — все знают об Олимпиадах, но на самом деле было много соревнований, регулярно проводившихся на различных уровнях, от общегреческого до сугубо местного. Затем это в тех или иных формах распространилось на интеллектуальное творчество — на искусство (особенно на литературу и музыку), позднее на философию и науку. Такое отношение создавало стимулы для поисков в самых различных направлениях интеллектуального творчества. В математике быстро стало ясно, что добиться общепризнанных и неопровержимых результатов здесь можно, лишь применяя строго логические рассуждения. Люди, чувствовавшие расположение к такой деятельности, испытывали при этом особого рода интеллектуальное наслаждение, причём это, конечно, было так же и на Древнем Востоке, но в Греции дедуктивное построение математической теории приобрело статус респектабельного занятия, а раньше все эти дедукции были личным делом писца и, конечно, никем не систематизировались (в отличие от результатов). Нет сомнений, что по крайней мере в Вавилоне проводились какие-то нетривиальные математические рассуждения, но систематическое дедуктивное изложение геометрии (к которой у греков в основном сводилась вся тогдашняя теоретическая математика) — достижение греков.

Плодами многовековой работы, в результате которой вся математика, а не только геометрия, приобрела систематический характер, мы пользуемся на каждом шагу, не замечая. Алгебра и буквенные обозначения в ней — это достижение уже не греков, а отчасти арабов, отчасти европейцев периода перехода от средних веков к новым. Мы на каждом шагу используем, что от перестановки слагаемых сумма не меняется и другие законы арифметических и алгебраических действий. Но ведь это надо было осознать и отчётливо сформулировать, чтобы потом это, так сказать, вошло в нашу плоть и кровь.

В школе более или менее дедуктивно, опираясь на аксиомы, строится геометрия. Но, к сожалению, при дедуктивном построении науки, прежде чем вы доберётесь до действительно содержательных и заранее не очевидных утверждений вроде хотя бы той же теоремы Пифагора, приходится довольно долго возиться с различными простыми фактами вроде того, что диаметр делит круг пополам или углы при основании равнобедренного треугольника равны. Оба эти утверждения приписывают, обоснованно или нет, Фалесу — греческому мудрецу, по преданию первым начавшему разрабатывать дедуктивную трактовку геометрии. С чисто практической точки зрения — ничего себе мудрец: даже ребёнок дошкольного возраста, когда делит яблоко пополам, режет его через центр, т. е. он понимает, чувствует, догадывается, что экваториальная плоскость делит шар пополам, — это посложнее деления круга! Но дело в том, что и такие вещи надо доказывать. За всё надо платить.

Спустя две тысячи лет один молодой человек, скорее даже юноша, читал «Начала» Евклида. Он читал формулировку теоремы, на секунду задумывался, представляя себе, о чём идёт речь, ему становилось ясно, что она верна, и он, не читая доказательства, переходил к следующему утверждению. Паренёк не понимал сути дедуктивного построения геометрии и зачем оно нужно. Что ж, он был не первым и не последним в этом отношении. Только это был Ньютон.

Так как это был Ньютон, то впоследствии он это понял. Для своего времени он как раз в наибольшей степени следовал нормам дедуктивного построения научной теории.

В школе обычно нет возможности полностью развернуть дедуктивное построение геометрии. И не потому, что это сложно (вспомните, Ньютону первые предложения Евклида вообще казались очевидными), а потому, что это скучно, и непонятно, зачем это нужно (вспомните о нём же), и требует времени. И надо следить, как бы ненароком не использовать что-нибудь совершенно нам ясное, но чего мы пока что ещё не доказали. Предпринимались героические усилия, чтобы разработать сравнительно простую, легко обозримую аксиоматику и чтобы строго логическое построение геометрии на её основе было по возможности коротким и прозрачным. Последнее достижение в этом направлении — учебник А. В. Погорелова. Но и его называют трудным и, говоря непочтительно, «заумным». Мне кажется, что в общеобразовательной школе, рассчитанной на всех подростков, юношей и девушек, независимо от того, чем они будут заниматься впоследствии, дать последовательное чисто дедуктивное построение геометрии никогда не удастся. (Я не говорю здесь о спецшколах физико-математического направления.)

Мне кажется, что то простое вавилонское доказательство теоремы Пифагора, которое приведено выше, долгое время оставалось «жертвой» тщетных попыток придать изложению геометрии строго дедуктивный характер. Ведь в нём используются площади, значит, при строго последовательном изложении предмета его надо отложить до того времени, когда будут изучаться площади. А в самой теореме речь идёт о длинах отрезков, и хорошо бы привести её в соответствующем месте, задолго до площадей. Кроме того, с самими площадями, если мы до них уже дошли, имеются свои сложности. Площадь не является первичным понятием, фигурирующим в аксиомах; значит, надо дать определение площади, а это не так-то просто. Правда, наибольшие сложности связаны с площадью криволинейной фигуры — честно говоря, я сомневаюсь, чтобы в школьном курсе это можно было сделать удовлетворительным образом. Но в доказательстве теоремы Пифагора нам нужны только многоугольники, у нас ведь там были четыре треугольника и два квадрата. С ними дело обстоит лучше. Надо также знать, что площадь фигуры равна сумме площадей её частей. Почему мы уверены, что это так? Интуитивная уверенность, по-моему, имеет отношение не столько к геометрии, сколько к физике. Мы представляем себе фигуру сделанной из какого-то однородного материала, тогда её площадь пропорциональна количеству содержащегося в ней вещества — её массе. Далее подразумевается, что когда мы разделяем тело на несколько частей, сумма их масс равна массе исходного тела. Это понятно, потому что всё состоит из атомов и молекул, и раз их число не изменилось, то не изменилась и их суммарная масса. Но подумайте, на какое количество экспериментальных физических фактов опирается это наше рассуждение. И ведь это отнюдь не геометрия. Впрочем, есть один геометрический момент, тоже нуждающийся в разъяснении. Ведь, собственно, масса куска однородного материала пропорциональна его объёму; значит, надо знать, что объём «листа», имеющего форму данной фигуры, пропорционален её площади. Это уже относится к стереометрии и является утверждением и о площадях, и об объёмах! Словом, сколь бы ни была обоснована опытом уверенность, что площадь фигуры равна сумме площадей её частей, в геометрии надо это доказывать. Здесь опять-таки возникают неприятности с криволинейными фигурами, но для многоугольника, разбиваемого на многоугольники же, всё обстоит довольно просто. В начале XX века существовали учебники (повышенной сложности), в которых всё это делалось аккуратно. Ничего особенно сложного здесь нет, но требуется время, которого в общеобразовательной школе хватить на это не может. В учебнике Киселёва существование площади, имеющей то самое свойство, которое мы сейчас обсуждаем, честно постулировалось как некое допущение, причём говорилось, что это на самом деле верно, но мы этого доказывать не будем. Так что и теорема Пифагора, если её доказывать с площадями, в чисто логическом отношении останется не совсем доказанной.

Замечание: раз уж я об этом заговорил, то остановлюсь на том доказательстве теоремы Пифагора, которое раньше в школе было, так сказать, основным. Оно не обращается к площадям, а основано на простом геометрическом построении и подобии возникающих при этом треугольников. Опустим в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом в вершине C высоту CH на гипотенузу $AB=c$ (рис. 2). Основание H высоты разбивает гипотенузу на отрезки $AH=d$ и $BH=e$. Как легко видеть, получаются пары подобных треугольников ACB и AHC, BCA и BHC. Например, $\angle ACB=\angle AHC$ (оба эти угла прямые) и $\angle BAC=\angle CAH$ (это же один и тот же угол). Отсюда

$$\frac{e}{a}=\frac{a}{c}, \qquad \frac{d}{b}=\frac{b}{c},$$

а следовательно, $a^2=ce$, $b^2=cd$. Вот и получается, что

$$a^2+b^2=c(d+e)=c^2.$$

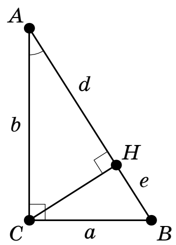

Рис. 2

Это ничуть не длиннее вавилонского доказательства. Но — не знаю, по каким психологическим причинам, — вавилонское доказательство воспринимается и запоминается легче.

Между прочим, приведённое выше простое доказательство формулы (2) для натуральных решений уравнения (1) тоже содержит некий деликатный момент. До (6) не к чему придраться*). А вот когда от (6) мы переходим к (3), мы используем следующее соображение: если квадрат некоторого натурального числа, скажем m^2, делится на некоторое простое число p, то и само это число, т. е. m, тоже делится на p. Причём мы используем его дважды: один раз — для нечётного p, второй — для $p=2$.

Для $p=2$ доказательство данного утверждения тривиально (если бы m было нечётным, оно представлялось бы в виде $2l-1$, откуда $m^2=4l^2-4l+1$ — нечётное число). А вот для неизвестного нам заранее (т. е., можно сказать, произвольного) p доказательство требует иных соображений. Известно и легко доказывается, что любое натуральное число $m>1$ разлагается в произведение простых чисел:

$$m=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r} \tag{7}$$

(p_i — простые, $p_i\neq p_j$ при $i\neq j$, k_i — натуральные). Тогда, конечно,

$$m^2=p_1^{2k_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{2k_r}, \tag{8}$$

и всё, что нам надо, — это знать, что если m^2 делится на простое число p, то p совпадает с одним из p_i. По существу, здесь не важно,

*) Можно придраться точно таким же образом, как это будет сейчас сделано, к абзацу, начинающемуся со слов «Так что если бы я хотел настаивать на обратном утверждении». Но в том же абзаце объяснено, что дальнейшее не зависит от обсуждаемого в нём утверждения, так что с точки зрения полноты доказательства (2) этого абзаца не существует.

что в (8) все показатели $2k_i$ являются чётными, так что если изменить обозначения, то речь идёт о следующем утверждении: если простое число p делит число m, разложенное в произведение простых чисел согласно (7), то p совпадает с одним из p_i. А последнее по существу означает, что разложить число m на простые множители можно только единственным способом.

Это кажется очевидным и, конечно, известно из арифметической практики. Коль скоро мы знаем, что $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, то 120 не делится на 7, равно как и не делится на $3^2 = 9$. И то, и другое легко проверить непосредственно. Вероятно, помимо эмпирической уверенности, возникающей из примеров, полусознательно работает ещё такое «общее» соображение: разлагая число на простые множители, мы как бы разбираем его на неразбирающиеся далее составные части, а в повседневной жизни мы постоянно убеждаемся, что для одной и той же вещи совокупность её составных частей всегда получается одной и той же. Скажем, если, разбирая будильник, мы получили какие-то зубчатые колёсики, то не может случиться, что, разбирая другой раз точно такой же будильник, мы получим шестерёнки другого размера или в другом количестве.

Но числа — не будильники, а опыт с конкретными числовыми примерами ещё не доказывает общего утверждения, относящегося ко всем натуральным числам (хотя и может подкрепить уверенность в его справедливости). На самом деле утверждение о единственности разложения на простые сомножители справедливо, но его надо доказывать. Интересно, что первым осознал необходимость в том, чтобы это утверждение было ясно сформулировано и доказано, был великий немецкий математик К. Гаусс. Это произошло сравнительно поздно — около 200 лет назад, когда математика была уже достаточно развитой наукой.

Выдающийся немецкий математик Х. Хассе в одной из своих книг выражал в исторических замечаниях недоумение, почему у Евклида нет теоремы об однозначности разложения числа на простые множители, хотя у него есть теорема, что если произведение двух натуральных чисел делится на простое число p, то хотя бы одно из этих чисел делится на p. (Последнего нам было бы достаточно.) С нашей теперешней точки зрения, главное тем самым было сделано, и до однозначности разложения оставался только один шаг, уже не трудный. В доказательстве сформулированной теоремы (а значит, и в доказательстве однозначности разложения натурального числа на простые сомножители) не используется никакой «высокой науки», но оно не такое уж короткое; правда, попутно получаются ещё кое-какие важные результаты. Позднее, уже за XX век, было придумано другое доказательство, более короткое, но не дающее ничего сверх доказываемого утверждения. Но и оно не такое уж короткое и простое; я сомневаюсь, чтобы в школе (исключая спецшколы или спецклассы) на него можно было тратить время. Но это относится к школе, а Евклида даже и более длинное рассуждение не испугало.

Хассе полагал, что древним грекам однозначность разложения на простые множители всё-таки была известна. Иное мнение высказано в учебнике по теории чисел, написанном другим выдающимся учёным — английским математиком Г. Харди — совместно с его соотечественником Э. Райтом. Они указывают, что древнегреческий математик попросту был бы не в состоянии сформулировать теорему об однозначности разложения натурального числа на простые множители, потому что у него не было алгебраических обозначений. Ведь если я говорю, что «разложение на простые сомножители единственно», то это не полная формулировка, а скорее сокращённое название результата. А в чём же, собственно, он состоит? Вот в чём. Пусть в дополнение к (7) имеется ещё одно разложение m на простые множители:

$$m=q_1^{l_1}\cdot\ldots\cdot q_s^{l_s}$$

(q_i — простые, $q_i\neq q_j$ при $i\neq j$, l_i — натуральные). Тогда $r=s$, числа $p_1, \ldots, p_r$ с точностью до порядка, в котором они пронумерованы, совпадают с $q_1, \ldots, q_s$ и показатели при совпадающих простых сомножителях тоже совпадают: если $p_i=q_j$, то $k_i=l_j$. Попробуйте сформулировать (только сформулировать!) всё это, не прибегая к буквенным обозначениям! А у Евклида, как указывают Харди и Райт, не было даже слова для обозначения произведения четырёх и более множителей.

Я хочу ещё немного остановиться на различии между числами и будильниками. Что различия имеются, это понятно даже людям, которые от математики далеки: им кажется, что математические объекты скорее напоминают снотворное. Но то различие между математическими объектами и будильниками, о котором я сейчас скажу, может показаться неожиданным. Рассмотрим пародию на арифметику, в которой «ареной действия» является множество*) M натуральных чисел вида $4k+1$ с целыми $k\geqslant 0$. Других чисел, кроме таких, для нас сейчас как бы не существует. Множество M, как говорят, замкнуто относительно умножения — это значит, что произведение любых двух его элементов снова принадлежит M. Действительно, сразу проверяется, что произведение

*) Ниже это слово встречается несколько раз. Вероятно, оно вам уже знакомо, но я всё же напомню, что множество — это совокупность (система, класс, собрание, коллекция) каких-нибудь объектов (не обязательно чисел). Наглядно можно представить себе, что эти объекты как бы сложены в мешок, причём он прозрачный: мы как бы «видим» сложенные в мешок предметы и можем говорить не только о мешке как о некоем едином целом, но и о его содержимом. Примеры: множество натуральных чисел, множество слушателей в аудитории. В отличие от употребления слова «множество» в обычном языке, в математике при его употреблении вовсе не имеют в виду, что в множество входит много объектов. Если объект a входит в множество A, то говорят, что a является элементом A, a принадлежит A, и пишут $a\in A$. Подмножество множества A — это такое множество B, все элементы которого принадлежат A, т. е., так сказать, B — «часть» A (только слово «часть» здесь употребляется в расширенном смысле: не исключено, что $B=A$). Например, множество чётных натуральных чисел — подмножество множества всех натуральных чисел. Вместо того чтобы говорить словами «B — подмножество A», пишут $B\subset A$.

двух чисел вида $4k+1$ снова имеет вид $4k+1$. Некоторые числа из M являются произведениями чисел из M, ни одно из которых не является единицей. Другие числа нельзя представить в таком виде; их естественно называть неразложимыми. Почти сразу же очевидно, что 9 — неразложимое число. (В M имеется всего одно число, отличное от 1, которое меньше 9, — это 5. Но 9 не делится на 5.) Проверим, что 49 тоже неразложимое число. В противном случае мы имели бы

$$49=(4a+1)(4b+1)=16ab+4(a+b)+1$$

с некоторыми натуральными a, b; отсюда

$$48=16ab+4(a+b), \quad 12=4ab+(a+b)>4ab, \quad 3>ab,$$

что возможно, лишь когда оба натуральных числа a, b равны 1 или когда одно из них равно 1, другое равно 2. Соответствующие произведения были бы $5\cdot5$ или $5\cdot9$; ни в том, ни в другом случае не получается 49. Аналогично доказывается неразложимость 21. С другой стороны, каждое разложимое число из M разлагается в произведение неразложимых чисел (последние, таким образом, играют в нашей пародийной «системе чисел» M такую же роль, какую играют простые числа среди всех натуральных чисел). Действительно, если $m\in M$ — разложимое число, то $m=kl$ с некоторыми k, $l\in M$, причём $k<m$, $l<m$. Если оба числа k, l неразложимы, то m уже представлено в требуемом виде; если одно из них или они оба разложимы, то разложим его (их) на множители, и т. д. При этом рассматриваемые числа всё время уменьшаются, так что рано или поздно этот процесс должен остановиться и мы получим разложение m на неразложимые множители. Это рассуждение — точно такое же, каким доказывается, что любое составное натуральное число разлагается в произведение простых чисел; в этом отношении наша пародийная арифметика не отличается от обычной. А вот в каком она отличается:

$$441=21^2=9\cdot49,$$

причём 21, 9 и 49 — неразложимые элементы M. Выходит, что «будильник» 441 можно разобрать на два одинаковых «колёсика» 21, а можно — на другие «колёсики» 9 и 49.

Вы, вероятно, знаете доказательство иррациональности $\sqrt{2}$. А вот используя однозначность разложения на простые множители, ничего не стоит доказать в два слова, что если натуральное число m не является k-й степенью никакого натурального числа, то $\sqrt[k]{m}$ — иррациональное число. Попробуйте сделать это! Вы увидите, насколько расширятся ваши возможности при использовании теоремы об однозначности разложения на простые множители — теоремы, упоминание о которой может показаться занудным педантизмом. Так что, с одной стороны, я уже сказал, что за всё приходится платить, но, с другой стороны, платить есть за что.

Говоря о построении математики как систематической науки, хочу отметить, что дедуктивное и систематическое построение —

это не одно и то же. В школе арифметика и алгебра излагаются, конечно, систематически, но нет и речи о том, чтобы их выводить дедуктивно из аксиом. А о геометрии по крайней мере объясняют, что её в принципе можно строить дедуктивно, и поясняют это на примерах, так сказать, каких-то фрагментов геометрии. На самом деле дедуктивно можно построить не только геометрию, но, оставаясь в пределах школьного материала, и алгебру, и арифметику. Я приведу сейчас те аксиомы, на которых основана арифметика — так называемые аксиомы Пеано. Сформулировал их примерно век назад итальянский математик Дж. Пеано. Такая поздняя формулировка аксиом арифметики — своего рода исторический парадокс.

В этих аксиомах речь идёт только о натуральных числах. Множество натуральных чисел обычно обозначают через $\mathbb{N}$. Это своего рода стандарт. Обычная латинская буква N может обозначать что угодно, а вот $\mathbb{N}$ — это обязательно множество натуральных чисел.

Среди натуральных чисел имеется одно особенное, которое выделяется с самого начала, — так называемая единица, обозначаемая через 1. На самом деле это, конечно, та самая единица, которую вы все хорошо знаете, но в данный момент это просто какое-то специальное натуральное число, о котором кое-что будет сказано в аксиомах. Далее, в множестве натуральных чисел имеются различные операции, которые вы знаете: сложение, умножение, а в известных случаях там определено также вычитание и деление. Но если бы мы захотели перечислить в виде аксиом основные свойства этих операций, формулировка получилась бы слишком длинной. Пеано заметил, что можно воспользоваться одной-единственной операцией, с которой вы познакомились ещё раньше, чем научились складывать, — с переходом к следующему числу. Когда ребёнок считает «один, два, три, ...», он как раз называет вслед за одним числом то число, которое за ним следует в ряду натуральных чисел. Освоившись со сложением, вы поняли, что число, следующее за x, — это $x+1$, и поэтому операция перехода к следующему числу как бы отступила на второй план, став частным случаем сложения. Теперь нам предлагается как бы вернуться в детство и временно забыть о сложении, а считать основной исходной операцией операцию перехода к следующему числу. Конечно, раз пока нет сложения, то нехорошо обозначать число, следующее за x, через $x+1$. Но как-то его обозначить надо, хотя в детстве мы обходились без всяких обозначений. Обозначим его через x'. Итак, у нас имеется некое множество $\mathbb{N}$, называемое «множеством натуральных чисел», в нём особо выделен некоторый элемент 1 («единица») и введена операция (отображение, функция), сопоставляющая каждому $x \in \mathbb{N}$ некоторое число $x' \in \mathbb{N}$ («число, следующее за x»). При этом выполняются следующие аксиомы:

1. Единица не следует ни за каким натуральным числом, т. е. при всех $x \in \mathbb{N}$ обязательно $1 \neq x'$.

2. Если $x'=y'$, то $x=y$. Можно сказать, что отображение $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, при котором каждое x переходит в x', никогда не переводит различные числа в одно.

3. Самая сложная аксиома — аксиома индукции. Пусть $M\subset\mathbb{N}$ — такое подмножество, что а) $1\in M$ (M содержит единицу); б) если $x\in M$, то и $x'\in M$ (вместе с каждым числом M содержит также и следующее за ним число). Тогда $M=\mathbb{N}$.

Вот и всё. Гораздо короче и проще, чем аксиомы геометрии. И на такой, казалось бы, скудной основе можно построить всю арифметику! Определить сложение и другие арифметические действия над числами, ввести отрицательные, рациональные, иррациональные и комплексные числа, доказать основные правила действий... Но ясно, что это не может быть сделано в два слова. Надо пройти путь примерно такой же длины, как в геометрии, пока доберёшься, скажем, до олимпиадных задач. В общеобразовательной школе этого, конечно, нет и никогда не будет.

Тут есть ещё одно обстоятельство, о котором надо сказать. Арифметика ведь строится не только на базе этих трёх аксиом. При этом используется логика — как же иначе? И используются кое-какие сведения о множествах — множества ведь фигурируют в наших исходных формулировках. Между прочим, и логику, и требуемые сведения о множествах тоже можно изложить аксиоматически, но это будет уже посложнее аксиом Пеано.

ВНУТРЕННИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Я говорил о построении систематических теорий. Вы знаете две такие теории: геометрию и арифметику вместе с алгеброй (в пределах школьного курса последние две на самом деле составляют единое целое). Но в математике много различных систематически построенных теорий с различными предметами исследования и различной степени общности. Те из вас, которые учатся в спецшколах или спецклассах физико-математического направления, возможно, знают, что алгебра как бы «отсоединяется» от арифметического материала и в таком виде может применяться к совсем иным объектам.

Но если говорить о внутреннем развитии математики, не вызванном её приложениями (по крайней мере, не вызванном непосредственно), то есть и другая сторона дела — решение различных проблем. Вы представляете себе задачи, которые вам предлагают на математических олимпиадах и аналогичных соревнованиях. На их решение даётся несколько часов, во время которых приходится работать весьма интенсивно. Много лет назад член-корреспондент Академии наук СССР Б. Н. Делоне, выступая перед школьниками на закрытии математической олимпиады, сказал, что творчество учёного-математика отличается от труда участника олимпиады только тем, что для решения олимпиадной задачи требуется примерно час времени, а для решения настоящей глубокой математической проблемы требуется 5 000 часов. Если работать по 12 часов в день, то получится примерно год. Можно работать и больше 12 часов, но долго так не выдержишь. Однако А. Н. Колмогоров, академик и один из самых крупных математиков XX века, в России, возможно, даже самый крупный, говорил, что у него этих 5 000 часов никогда не было. Сперва он говорил всего о трёх сутках, потом увеличил срок до двух недель. Конечно, у него в эти дни интенсивность была исключительно высокой, и он думал о своей задаче всё время, когда не спал, да, вероятно, какая-то подсознательная работа продолжалась и во сне; в итоге можно набрать примерно 400 часов ($15 \cdot 24 = 360$), что примерно в 10 раз меньше чем 5 000. А вот не было ли у него продолжительной подсознательной работы в то время, когда он о соответствующей задаче вроде бы не думал, т. е. сознательно ею не занимался? Но, насколько я представляю себе Колмогорова, столько часов, сколько полагается по Делоне, всё равно не получится. Между тем Колмогоров как раз выделялся числом решённых им крупных научных задач.

С другой стороны, полученное недавно доказательство знаменитой гипотезы Ферма 350-летней давности*) потребовало намного больше 5 000 часов. Окончательное решение было получено Э. Уайлсом, и у него это, действительно, заняло порядка 5 000 часов, но ведь он завершал работу ряда других людей, и с учётом затраты их времени получится едва ли менее 50 000 часов. Но это, конечно, крайний случай.

Есть и ещё одно существенное отличие научных задач от олимпиадных. Олимпиадные задачи должны решаться на основе тех знаний, той систематической теории, которые имеются у учеников соответствующего возраста. Решение научной задачи может требовать новых знаний, которых в данный момент ни у кого нет. В ходе её решения придётся разработать какую-то новую теорию, которая затем может пригодиться и для других целей.

Таким образом, развитие математики связано с тремя факторами: её приложениями (не обязательно в смысле удовлетворения сиюминутных практических потребностей, но также и в смысле использования математики в других науках); решением научных проблем; систематической разработкой новых теорий. Вы, вероятно, знаете, что уже 100 лет регулярно проводятся Международные

---

*) Вероятно, её формулировка вам известна, но я всё-таки напомню: гипотеза состоит в том, что при $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах, т. е. что ни для каких трёх натуральных чисел x, y, z последнее равенство не выполняется. Ферма сформулировал это утверждение не как гипотезу, а как известный ему факт; он это сделал в замечании на полях книги древнегреческого математика Диофанта, добавив, что на полях слишком мало места для доказательства. Поэтому данная гипотеза получила название «Великая теорема Ферма», хотя теперь едва ли кто-нибудь верит, что у Ферма действительно было полное доказательство.

математические конгрессы. Так вот, при самом их начале, на первом и втором конгрессах, состоялись доклады крупнейших математиков того времени — А. Пуанкаре и Д. Гильберта, — посвящённые двум первым компонентам развития математики — вопросам, связанным с физикой (в то время значение других приложений для развития самой математики было значительно меньше, чем значение физики, да и сейчас она в этом отношении лидирует, хотя и не в такой степени), и проблемам, возникающим в самой математике. Докладов о третьей компоненте — развитии теорий, насколько я знаю, не было ни тогда, ни позднее. Быть может, потому, что не нашлось третьего математика такого ранга, как Пуанкаре и Гильберт, или потому, что наличие этой третьей компоненты очевидно?

Несколько слов в связи с докладом Гильберта. Сперва исторический нюанс: он был как бы спровоцирован докладом Пуанкаре; Гильберт захотел показать, что важнейшие стимулы для развития математики имеются внутри её самой. Но, работая над докладом, он несколько поостыл — ведь, в конце концов, Пуанкаре вовсе не утверждал, будто новые задачи возникают только из физики, не говоря уже о том, что заподозрить Пуанкаре в таком одностороннем взгляде было бы нелепо, его творческая деятельность убедительно демонстрировала иное. Никакой полемики с Пуанкаре не произошло.

Доклад Гильберта содержит сравнительно небольшую первую часть, где Гильберт в общих чертах говорил о значении конкретных проблем для развития математики, и наиболее знаменитую вторую часть, где он привёл ряд таких проблем с небольшими комментариями. Переходя к формулировке конкретных проблем, Гильберт сказал: «Разрешите мне в дальнейшем, как бы на пробу, назвать несколько определённых проблем из различных математических дисциплин, проблем, исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки». А заканчивая, он сказал, что «названные проблемы — это только образцы проблем». Он не претендовал на составление всеобъемлющего списка проблем, которые можно было бы указать в то время. В основном он говорил о вопросах, которые были близки к его собственным научным интересам, так что он мог оценить их важность и сделать по их поводу содержательные замечания. Но благодаря свойственной Гильберту широте научных интересов его проблемы затрагивали значительную часть математики. В нескольких случаях Гильберт напоминал о проблемах, поставленных ранее другими людьми, но, например, о проблемах, сформулированных Пуанкаре в далёких от Гильберта разделах математики, он не говорил. Это понятно: Пуанкаре был жив и здоров, он мог сам формулировать и комментировать свои проблемы, да, собственно, он это и делал, только эти его проблемы и замечания разбросаны по его работам, а вместе он их не собирал. Но гильбертовские «образцы» оказались удивительно удачными. Они оказали большое стимулирующее влияние на развитие математики в XX веке.

Надо оговориться, что некоторые из проблем Гильберта относились скорее к разработке систематических теорий, они звучали примерно так: «Исследовать такие-то вопросы с такой-то точки зрения». Но большинство проблем — это были вполне конкретные вопросы, на которые требовалось ответить «да» или «нет». Как правило, если бы вы от какого-нибудь оракула узнали правильный ответ, большой пользы от этого не было бы, но для того, чтобы получить ответ своими силами, без подсказки оракула, потребовалось придумать много нового и интересного. Об этом я, конечно, не могу здесь говорить, прошу поверить на слово. Я приведу только один пример конкретной проблемы: является ли число $2^{\sqrt{2}}$ рациональным или иррациональным? На самом деле соответствующая проблема (7-я проблема Гильберта) была поставлена в общем виде*), но сам Гильберт считал вопрос о $2^{\sqrt{2}}$, так сказать, наиболее показательным. Когда ему случалось упоминать впоследствии о 7-й проблеме, он обычно спрашивал именно о $2^{\sqrt{2}}$.

Повторяю, что Гильберт очень удачно выбрал свои «образцы», нисколько не ошибившись в оценке их важности. А вот в оценке их сравнительной сложности он иногда существенно ошибался. Здесь стоит сказать, как он оценивал сложность трёх проблем, связанных с теорией чисел. Речь будет идти об иррациональности $2^{\sqrt{2}}$ и вообще о 7-й проблеме, гипотезе Ферма (она в список проблем Гильберта не попала, скорее всего потому, что о ней все и так помнили, но он упоминал её во вступительной части) и о гипотезе Римана, которую я даже не буду формулировать (она составляет основную часть 8-й проблемы Гильберта). В его биографии сообщается, что позднее Гильберт однажды так оценил их относительную трудность. Гипотеза Римана будет доказана ещё при его жизни (а он был уже не молод). Доживёт ли сам Гильберт до доказательства теоремы Ферма, по меньшей мере сомнительно, но самые молодые из присутствующих доживут. Но даже им не суждено узнать, как выяснится вопрос о $2^{\sqrt{2}}$.

Вышло всё наоборот. Иррациональность $2^{\sqrt{2}}$ была доказана ещё за 14 лет до смерти Гильберта, в 1930 году. Это сделал Р. О. Кузьмин,

*) Приведу необходимые пояснения. Алгебраическим называется число, являющееся корнем алгебраического уравнения $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами a_i. Алгебраическое число может быть как рациональным, так и иррациональным. Иррациональное число, не являющееся алгебраическим, называется трансцендентным. О существовании трансцендентных чисел подозревали ещё в XVIII веке, но первое трансцендентное число указал Ж. Лиувилль в 1844 году. В 1873 году Ш. Эрмит доказал трансцендентность играющего большую роль в анализе числа e, а в 1882 году Ф. Линдеман, развивая метод Эрмита, установил трансцендентность ещё более знаменитого числа π. На какое-то время на этом успехи прекратились. 7-я проблема Гильберта гласила: пусть a — алгебраическое число, отличное от 0 и 1, b — алгебраическое иррациональное число; не будет ли число a^b трансцендентным? Должен добавить (но объяснять этого уже не буду), что числа a, b здесь могут быть комплексными.

но он продолжал работу, начатую А. О. Гельфондом годом раньше, когда Гельфонду удалось сделать первый и чрезвычайно существенный шаг в решении 7-й проблемы Гильберта (в этой первой работе речь шла не об иррациональности чисел типа $2^{\sqrt{2}}$, а об иррациональности чисел из некоторого другого класса). Окончательный общий результат по 7-й проблеме был получен в 1934 году А. О. Гельфондом и Т. Шнайдером. Гипотеза Ферма была доказана несколько лет назад; в принципе, кто-нибудь из тех, кто слышал предсказание Гильберта в свои студенческие годы, мог до этого дожить, но уж наверняка таких совсем немного. Гипотеза Римана по сей день не доказана. Мне кажется, эта ошибка гения убедительно свидетельствует, что он действительно удачно выбрал трудные задачи.

Почти все задачи Гильберта теперь решены, правда, некоторые — не полностью. Всё же в основном XX век с этими задачами справился. А Гильберт в какой-то степени сумел заглянуть вперёд на 100 лет! В большинстве случаев ответ оказался таким, как он и ожидал, хотя есть несколько исключений.

* * *

Мой доклад подходит к концу. О любой из трёх компонент, существенных для развития математики, можно было бы сказать гораздо больше, даже не выходя за пределы школьных программ. Особенно мало я сказал о приложениях. Вы учите физику и, конечно, знаете, что математика нужна не только для того, чтобы подсчитать провиант для солдат, копающих пруд, или число кирпичей для насыпи. Что вы, вероятно, знаете хуже — это как и в какой степени приложения, причём они бывают очень различными, поныне стимулируют развитие самой математики. Но раз уж я начал с цитаты из литературного классика, цитатой и кончу: «Никто необъятного объять не может».